P-q-Formel

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS Lernvideos

Mit der PQ-Formel kannst du die Lösungen von quadratischen Gleichungen in Normalform berechnen. Ist die quadratische Gleichung in allgemeiner Form, musst du sie zuerst in die Normalform umwandeln.

Normalform

$x^2+px+q=0$

PQ-Formel

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Beispiel 1

Löse die Gleichung $2x^2-20x+48=0$.

$$\begin{aligned} 2x^2-20x+48 &= 0 \quad \mid :2 \text{ (auf Normalform bringen)} \\ x^2-10x+24 &= 0 \end{aligned}$$

$p=-10 \qquad q=24$ in PQ-Formel einsetzen

$x_{1,2}=-\frac{-10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2-24} \qquad x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-24} \qquad x_{1,2}=5\pm 1$

$x_1=4 \qquad x_2=6 \qquad \mathbb{L}=\{4;6\}$

Diskriminante

Löst du eine quadratische Gleichung mit der PQ-Formel, kannst du die Anzahl der Lösungen einfach ablesen.

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Der Ausdruck unter der Wurzel wird Diskriminante genannt:

$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$

Die Anzahl der Lösungen ist abhängig von der Diskriminante.

$\boldsymbol{D>0}$: Zwei Lösungen, $\mathbb{L}=\{x_1;x_2\}$

$\boldsymbol{D=0}$: Eine doppelte Lösungen, $\mathbb{L}=\{-\frac{p}{2}\}$

$\boldsymbol{D<0}$: Keine reelle Lösung, $\mathbb{L}=\{\}$

Beispiel 2

$D>0:$

$x^2-2x-3=0$

In PQ-Formel einsetzen.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+3} \\ x_{1,2} &= 1\pm\sqrt{4} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ zwei Lösungen

$\mathbb{L}=\{3;-1\}$

$D=0:$

$x^2-2x+1=0$

In PQ-Formel einsetzen.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-1} \\ x_{1,2} &= 1\pm\sqrt{0} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ doppelte Lösung

$\mathbb{L}=\{1\}$

$D<0:$

$x^2-2x+4=0$

In PQ-Formel einsetzen.

$x_{1,2}=-\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-4}$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{-3}$

$\rightarrow$ keine Lösung

$\mathbb{L}=\{\}$